

DIFUSÃO DE ÁGUA EM MEIOS POROSOS: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM ANALÍTICA

Sabrina S Dezem¹, Saymon H S Santana²

¹ *Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Faculdade de Engenharia Civil, dezemsabrina@gmail.com*

² *Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Faculdade de Engenharia Civil, saymon@unifesspa.edu.br*

RESUMO: Neste trabalho apresentamos uma proposta de modelagem matemática simplificada para a dinâmica da percolação de água em um meio poroso. Uma vez estabelecidos os limites do tratamento clássico baseado na Lei de Darcy, foi possível, através de um tratamento diferencial baseado na equação de difusão, considerar similaridades correspondentes àquelas adotadas em projetos de aterros sanitários e obter distribuições de concentração de água em função do espaço e do tempo.

Palavras-chave: Percolação; Aterro Sanitário; Modelagem; Equação de Difusão.

1. INTRODUÇÃO

Os problemas com o meio ambiente relacionados aos resíduos sólidos vêm se destacando, em diferentes cenários ao redor do mundo, conforme registrados em uma grande quantidade da literatura especializada (FU, 2010). Muitos desses trabalhos são voltados à reciclagem e ao gerenciamento dos resíduos sólidos urbanos (RSU).

O gerenciamento de RSU pode ser dividido em diferentes etapas, a última delas, particularmente, refere-se à disposição final do produto. Uma estratégia usual para seu tratamento é a acomodação dos resíduos, sejam eles com ou sem tratamento prévio, em células de aterros sanitários (OLIVEIRA, 2017).

Neste contexto, uma das grandes preocupações atuais no setor de preservação ambiental é a contaminação de águas subterrâneas em decorrência da presença de aterros sanitários. Em particular aqueles com ausência de monitoramento do fluxo ou sem o devido controle.

Em sistemas como esses, o fluxo de água proveniente de precipitações pluviométricas para o interior do aterro desempenha um papel fundamental na decomposição e infiltração de resíduos. Sua ação promove um maior volume de lixiviado, normalmente com elevados percentuais de metais pesados e outros componentes poluidores.

O conhecimento dos processos difusivos e hidrológicos que ocorrem dentro das diferentes camadas do aterro é fundamental para seu bom funcionamento. Este

cuidado é requerido desde as etapas de planejamento até a manutenção do local de deposição dos resíduos sólidos.

Particularmente no contexto da engenharia civil, o entendimento preciso do comportamento da água no interior do solo permite determinar as forças exercidas nas partículas sólidas e a consequente influência no estado de tensões do solo. Essa alteração na tensão efetiva está intimamente relacionada a fatores como perda de estabilidade e erosão interna da camada.

Nesta perspectiva, a modelagem matemática do fluxo de água e sua variação ao longo do tempo pode proporcionar a previsão das condições críticas, bem como a otimização de custos operacionais de implementação e controle do aterro.

2. LIMITES DA LEI DE DARCY E EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

As primeiras análises formais da dinâmica de fluidos em meios sólidos porosos são atreladas aos resultados do estudo de Darcy (1856, *apud* BROWN (2002)), que tratou do sistema de fluxo em aquíferos e estabeleceram, portanto, os conceitos fundamentais relativos à dinâmica da percolação de água.

Com base em uma análise experimental, foi estabelecido que a concentração de um fluxo de água (de viscosidade μ) em uma camada de solo, de espessura L , área de seção transversal A e permeabilidade κ , poderia ser estimada com base na vazão volumétrica Q através do meio, devida a uma queda de pressão ($P_B - P_A$), dada por:

$$Q = -\frac{\kappa A}{\mu} \frac{P_B - P_A}{L}. \quad (1)$$

Entretanto, o modelo empírico proposto limita-se a situações de regime unidirecional, estacionário e de baixa velocidade de fluxo através do meio poroso. Para sistemas mais complexos e reais, nos quais há variações espaciais e temporais tanto das características do meio quanto do fluxo de água, faz-se necessário o uso de um modelo matematicamente mais preciso.

Nesta perspectiva, o uso de um tratamento diferencial, baseado na equação de difusão, constitui uma maneira melhor fundamentada e que permite levar em consideração os fatores supracitados, limitantes da Lei de Darcy.

O desenvolvimento da equação diferencial permite ainda considerar situações

nas quais a concentração da substância dissolvida é suficientemente pequena; coeficientes de dispersão independentes da concentração; ou mesmo, cenários nos quais ocorrem reações químicas entre solvente e soluto.

A modelagem matemática proposta neste trabalho é feita com base na equação de difusão. O seu desenvolvimento aqui segue uma abordagem análoga à proposta em OGATA (1970). Nela, o movimento do fluido no meio pode ser analisado sob duas perspectivas: dispersiva e convectiva. Considera-se um elemento cúbico em um sistema cartesiano de referência, conforme ilustrado na Figura 1.

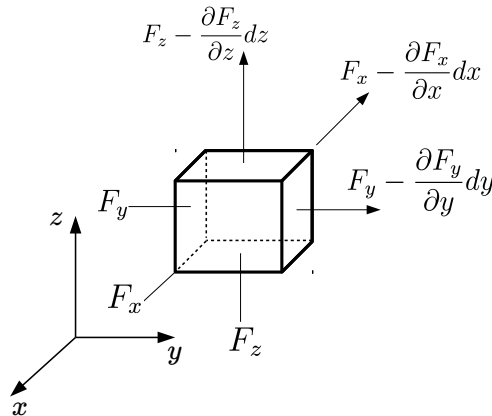


Figura 1. Representação do balanço de massa em um elemento do fluido. Fonte: da Autora (2020).

Deste modo, considerando um fluxo de massa por unidade de área, e por unidade de tempo, $F(x,y,z,t)$ a uma velocidade $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, a componente do fluxo que é transportado na direção x , pode ser escrita por:

$$F_x = v_x C - f D_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (2)$$

onde C representa a concentração de massa de soluto por unidade de volume, f é a porosidade do meio e D_x é o coeficiente de dispersão do fluido na direção x . Expressões similares também são obtidas para as direções y e z .

A diferença entre a quantidade de soluto que entra e que sai do elemento de volume da Figura 1 pode ser escrita por $\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx dy dz$ e que a taxa de variação temporal de massa também pode ser representada por $f \frac{\partial C}{\partial t} dx dy dz$, então é possível escrever a relação

$$\nabla \cdot \vec{F} = f \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (3)$$

Nos casos em que o coeficiente de dispersão é isotrópico, temos que $D_x =$

$D_y = D_z = D$ e que, também não há fontes ou sumidouros de soluto no elemento de volume, a Equação (3) pode ser escrita como

$$D \left(\nabla^2 \vec{F} \right) = \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (4)$$

A solução da Equação (4) fornece o comportamento espacial e temporal da concentração de um soluto em um meio isotrópico e homogêneo.

3. CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DE UMA CAMADA DE ATERRO

Conforme mencionado na seção 1, um dos mais relevantes interesses da engenharia é a modelagem da percolação de água em camadas de aterros sanitários. O solo, por sua vez, possui características peculiares que influenciam de modo relevante a modelagem proposta.

Os valores de condutividade hidráulica sugeridos devem ser inferiores 10^{-8} m/s segundo a NBR 13.896 (NBR 13896, 1997) ou mesmo a 10^{-9} m/s conforme os critérios estabelecidos pela Agência de Proteção Ambiental dos EUA (US ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 1993). A Figura 2 representa valores típicos de K para diferentes tipos de solo.

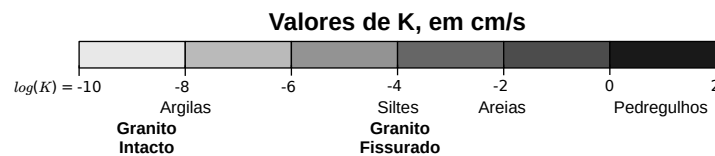


Figura 2. Valores típicos de condutividade hidráulica para diferentes tipos de solo. Fonte: Adaptado de (MASSAD, 2010).

No Brasil, os requisitos técnicos são regulamentados pela ABNT NBR 13896 e pelas legislações federal, estadual e municipal. Assim, as indicações de critério geológico e de tipo de solo existente são importantes na determinação da capacidade de depuração do solo e da velocidade de infiltração, promovendo a segurança do conjunto de camadas.

Os valores normalizados de condutividade hidráulica correspondem aos materiais argilosos, propícios de utilização em obras de aterros, principalmente devido à combinação de reduzidos valores de densidades secas baixas com umidades ótimas elevadas (PINTO, 2006). Esses fatores, associados a um processo adequado de com-

pactação, permitem reduzir a probabilidade de infiltração nas camadas adjacentes do solo.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho, foram analisados cenários específicos nos quais o fluxo ocorre unidimensionalmente na direção z , conforme ilustra a Figura 3 para o caso de uma camada do meio de espessura L . Para essas condições, a Equação (4) pode ser escrita como

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (5)$$

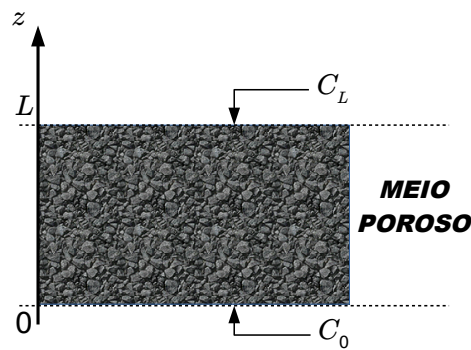


Figura 3. Modelo unidimensional para camada de meio poroso.
Fonte: da Autora (2020).

O modelo mais simples desse estudo corresponde ao caso em que a concentração não apresenta variação temporal significativa. Neste caso, considerando como condições de contorno as concentrações nas extremidades do meio $C(z = 0) = C_0$ e $C(z = L) = C_L$, a solução para a Equação (5) traduz um modelo linear de distribuição dado por:

$$C(z) = \frac{C_L - C_0}{l} z + C_0. \quad (6)$$

Uma segunda abordagem trabalhada aqui consiste na proposição de uma solução através de uma separação de variáveis. Desta forma, a solução para a Equação (5) seria do tipo $C(z,t) = Z(z)T(t)$ e a Equação (5) passa a ser dada por:

$$D \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \frac{dT}{dt}. \quad (7)$$

Para que a Equação (7) seja satisfeita é necessário que cada um dos membros seja igual a uma mesma constante $-\beta^2$, de modo que pode-se separar o problema em duas equações, uma com caráter espacial e outra temporal, de modo que:

$$\begin{cases} \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\beta^2, \\ \frac{1}{DT(t)} \frac{dT}{dt} = -\beta^2. \end{cases} \quad (8)$$

Cujas soluções, respectivamente, podem ser escritas por:

$$\begin{cases} Z(z) = \sin(\beta z), \\ T(t) = e^{-D\beta^2 t}. \end{cases} \quad (9)$$

Adotando uma metodologia semelhante à apresentada em Boyce & Diprima (2015), a constante β pode ser relacionada com a espessura do meio de modo que $\beta = L^{-\frac{1}{2}}$. Deste modo, a combinação dessas soluções separadas compõe uma possível solução para a Equação (5), de modo que:

$$C(z,t) = C' e^{-\frac{Dt}{L}} \sin\left(\frac{z}{\sqrt{L}}\right), \quad (10)$$

onde C' é um parâmetro de integração relacionado à concentração inicial. Na Equação (10), os maiores valores coeficiente de dispersão estão associados aos menores decaimentos temporais da concentração.

A Figura 4 mostra (numa perspectiva normalizada) diferentes distribuições de concentração em função da profundidade do meio e para diferentes instantes de tempo. Diferente da Equação (6), aqui a concentração varia com um comportamento assintótico.

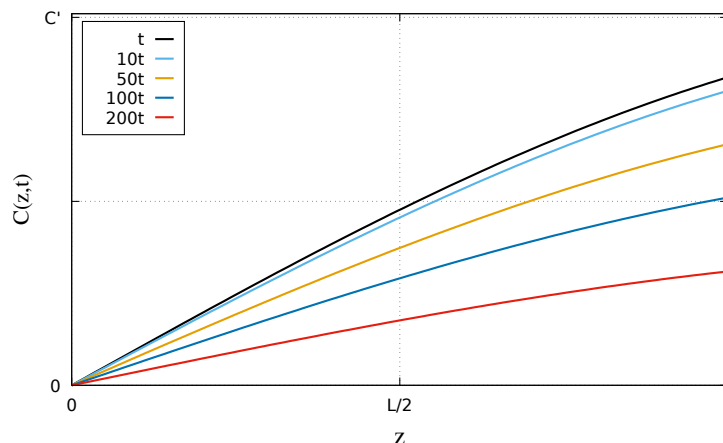


Figura 4. Variação espacial da concentração para diferentes instantes de tempo. Fonte: da Autora (2020).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tratou de uma abordagem analítica para o estudo da percolação de água em meios porosos. Uma vez estabelecidos limites para a abordagem clássica da Lei de Darcy, a modelagem proposta através da equação de difusão permitiu a construção de perfis de concentração com variações espaciais e temporais aplicáveis a diferentes tipos de meios porosos.

O uso de métodos numéricos para solução da Equação (3) em mais dimensões e para meios anisotrópicos também são pretendidos. Os resultados obtidos aqui constituem o anteâmbulo de um trabalho em desenvolvimento para a otimização dos parâmetros de projeto que garantam eficiência e segurança estrutural em camadas de aterros sanitários.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação Fundação Amazônia de Ampato a Estudos e Pesquisa - FAPESPA, pelo fomento a essa pesquisa através do edital PRO-PIT/Unifesspa nº 01/2020 bem como ao Instituto de Geociências e Engenharias da Unifesspa pelo apoio através dos Projetos de Pesquisa de portaria 0208/2019 e 0134/2020.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13.896 Aterros de resíduos não perigosos - Critérios para projeto, implantação e operação**. Rio de Janeiro, 1997.
- BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10^a ed LTC, 2015.
- BROWN, G. O. **Henry Darcy and the making of a law**, Water Resources Research, V. 38, No . 7, 1106. Comp. Appl. Math., 2002
- FU, H., HO, Y., SUI, Y., LI, Z.. **A bibliometric analysis of solid waste research during the period 1993-2008**. In: Waste Management. V.30. p. 2410-2017. 2010.
- MASSAD, F. **Obras de Terra**. 2^a Edição. Oficina de Textos, 2010.

OGATA, A. **Theory of Dispersion in a Granular Medium: Fluid Moviment in Earth Materials**. In: Geological Survey Professional Paper 411-I: 1970.

OLIVEIRA, R., BRAGA, R. M. Q. L.. **Sistema de cobertura final de um aterro sanitario para a RMB de Belem-PA com emprego de residuos de construcao civil**. In: R. gest. sust. ambient., Florianopolis, v. 6, n. 3, p. 573-596, 2017.

PINTO, C. S. **Curso Básico de Mecânica dos Solos**. 3ª Edição. São Paulo: Oficina de Textos, 2006.

US ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY., WORMALD, N. C. **Solid waste disposal facility criteria**. Chapter 4, Subpart D, Design Criteria, 1993.