XII Salão de
Iniciação Científica
PUCRS

Análise de Materiais Utilizados em Panelas Domésticas Utilizando Diferenças Finitas

Victor Velho de Castro[1], Marcela Jochade Paim[2], Dra. Eliete Biasotto Hauser[3] (Orientadora)

[1]*Faculdade de Engenharia Mecânica- PUCRS,* [2]*Faculdade de Engenharia Química- PUCRS,* [3]*Faculdade de Matemática-PUCRS*

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é aplicar o método de diferenças finitas para estimar a variação de temperatura de um objeto, mantendo fixas as condições iniciais e de contorno e variando o material (alumínio e baquelite).

Introdução

As situações que ocorrem na natureza são complexas e difíceis de serem analisadas de forma exata. Utilizando hipóteses simplificadoras é possível construir um modelo matemático que aproxima a realidade do problema. Diversos modelos matemáticos são expressos por equações diferenciais ordinárias, para problemas unidimensionais e parciais nos casos multidimensionais, com soluções analíticas nem sempre possíveis de serem obtidas. A análise dessa modelagem matemática requer métodos numéricos. No presente estudo utilizamos o Método de Diferenças Finitas (MDF), com derivadas parciais da função temperatura *u (x,t)* aproximadas por diferenças finitas centradas:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(x_i, t_j\right) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i, t_j\right) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{1}$$

Desta forma a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ é aproximada pela equação de diferenças finitas.

$$u_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) i_{i,j} + \frac{\alpha^2 k}{h^2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) \tag{2}$$

A equação (2) gera valores que convergem para a solução exata se $\frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$.

Problema Ilustrativo

Consideramos o problema de condução de calor transiente num fio de 50 cm de comprimento, imerso em vapor até que sua temperatura seja de 100º C (ao longo de todo comprimento). No instante t=0, sua superfície lateral é isolada e as duas extremidades são enterradas no gelo 0ºC. Nosso objetivo é determinar *u(25,600)*, a temperatura no ponto médio do fio após dez minutos, considerando dois tipos de materiais, fio de alumínio e fio de cobre. Os cálculos foram realizados com auxílio do software Microsoft Excel com espaçamento de malha (grossa), definida por h=12,5 na dimensão x e k=60 segundos para o tempo t. Esse problema é modelado matematicamente por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad t>0, \quad 0<x<50 \\ u(0,t) = u(50,t) = 0 \\ u(x,0) = 100 \\ u(x,t) < M \end{cases} \tag{3}$$

Situação 1 - Fio de Alumínio

Se considerarmos o fio fabricado em alumínio, caracterizado pela difusividade térmica α=0,85, obtemos a equação de diferenças finitas:

$$u_{i,j+1} = 0.9944512 \quad u_{i,j} + 0.0027744 \quad \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \right) \tag{4}$$

Os resultados obtidos são apresentados na tabela I.

Tabela I – Distribuição de temperatura no fio de alumínio

Tempo t (s)	u (0, t)	u (12.5, t)	u (25, t)	u (37.5, t)	u (50, t)
600	0	91,987668341517	99,386907956831	91,987668341517	0
540	0	92,730334337811	99,503956141600	92,730334337811	0
480	0	93,485128774913	99,609790292626	93,485128774913	0
420	0	94,252367167859	99,703994411395	94,252367167859	0
360	0	95,032374351611	99,786139472687	95,032374351611	0
300	0	95,825484762965	99,855783026684	95,825484762965	0
240	0	96,632042731020	99,912468788965	96,632042731020	0
180	0	97,452402776474	99,955726218035	97,452402776474	0
120	0	98,286929920000	99,985070080000	98,286929920000	0
60	0	99,136000000000	100,000000000000	99,136000000000	0
0	0	100,0000	100,0000	100,0000	0

Percebe-se que a temperatura no centro do fio após 10 minutos é aproximada por u (25,600) = 99,98ºC.

Também, por simetria, estimamos a temperatura em u(12.5,t) = u(37.5,t) = 91,98ºC.

Situação 2 - Fio de Baquelite

Considerando baquelite como material do fio, caracterizado por difusividade térmica α=0,85, obtemos a equação de diferenças finitas:

$$u_{i,j+1} = 0.999999232 \quad u_{i,j} + 3{,}84 \times 10^{-7} \quad \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \right) \tag{5}$$

Os resultados desta situação são apresentados na tabela II, e mostram que após 10 minutos a temperatura em todo o fio é aproximadamente 99,99º C.

Tabela II – Distribuição de temperatura no fio de baquelite

Tempo t(s)	u (0, t)	u (12.5, t)	u (25, t)	u (37.5, t)	u (50, t)
600	0	99,999616001327	99,999999998673	99,999616001327	0
540	0	99,999654401062	99,999999998938	99,999654401062	0
480	0	99,999692800826	99,999999999174	99,999692800826	0
420	0	99,999731200619	99,999999999381	99,999731200619	0
360	0	99,999769600442	99,999999999558	99,999769600442	0
300	0	99,999808000295	99,999999999705	99,999808000295	0
240	0	99,999846400177	99,999999999823	99,999846400177	0
180	0	99,999884800088	99,999999999912	99,999884800088	0
120	0	99,999923200030	99,999999999971	99,999923200030	0
60	0	99,999961600000	100,000000000000	99,999961600000	0
0	0	100,0000	100,0000	100,0000	0

Observamos que ocorre concordância com o valor u (25,600) = 99.99999995º C, obtido com a solução analítica do problema (3), obtida pela técnica de separação de variáveis expressa por

$$u(x,t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=ímpar}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{-\alpha n^2 \pi^2 t}{9}} \; sen(\frac{n\pi x}{50})$$

Considerações finais

A temperatura é uniformemente distribuída no fio de baquelite, o que é típico de um material com propriedades de isolamento térmico. Por ser um material isolante, a velocidade de resfriamento é mais lenta quando comparamos com materiais condutores de calor, como o alumínio. O exemplo apresentado demonstrou o potencial do método de diferenças finitas, cujos resultados obtidos aproximam razoavelmente o comportamento térmico real dos materiais estudados (INCROPERA, 2007). Como sequência do presente trabalho, os resultados aqui obtidos serão comparados com os gerados a partir de refinamento da malha. Aplicaremos o MDF em sistemas envolvendo geometrias bidimensionais e tridimensionais.

Referências

BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 7. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 2005.

INCROPERA, F, et. al., **Fundamentos de Transferência de Calor**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2007.